

[文章编号] 1003-4684(2023)04-0088-04

膨胀土变形特性和基于 Mohr-coulomb 准则本构关系

聂去尘, 庄心善, 周 荣, 文 武

(湖北工业大学土木建筑与环境学院, 湖北 武汉 430068)

[摘 要] 膨胀土是一种强度较高的可塑性特殊黏土,其变形特性在力学上表现为球应力与偏应力的交叉作用,其硬化规律应遵循非关联塑性流动法则。本文通过侧限压缩试验和固结排水试验,对膨胀土的剪缩性、压硬性及两者的耦合关系作了阐述,并采用 Mohr-Coulomb 屈服条件,假定其屈服函数公式与塑性势函数公式相同,只是将内摩擦角 φ 替换成剪胀角 ψ ,从而推导了膨胀土的弹塑性本构关系,研究表明: Mohr-Coulomb 本构模型高度适用于正常固结膨胀土土体,可以较精确地描述膨胀土的变形特性与本构关系。

[关键词] 膨胀土; 变形特性; 耦合; 剪胀角; 本构关系

[中图分类号] TU 411 **[文献标识码]** A

膨胀土是一种强度较高且塑性较好的特殊黏土^[1],在外力作用下其变形性状较为复杂,需通过室内外试验来研究它的变形和力学特性,如膨胀土剪胀性和压硬性的耦合关系,剪胀角的取值,以及本构模型的选择等问题,这可为膨胀土工程设计的科学性、合理性、安全性提供重要的理论支撑。

国内外学者对此已有相关研究,并取得了大量的科研成果。王靖涛^[2,3]等系统阐述了土体材料体应变与剪应变的交叉关系,得出主应力差和静水压力同时作用于体积变形和剪切变形。罗刚等^[4]通过研究 Duncan-Chang 双曲线增量模型以及双屈服面模型,并结合两者优势综合反映了土的应变软化和应变硬化特征。Rowe 等^[5]以砂土土体为例,在考虑了临界状态、孔隙比后修正了应力剪胀理论,进而得出剪胀角的概念。李朝阳^[6]等依据膨胀土的亲水性特点,深度研究含水率与膨胀土各强度指标之间的关系,提出了基于 Mohr-Coulomb 准则的本构模型。

综上所述,学者们在岩土体材料应变耦合作用和本构关系^[7]方面已有成熟的科研成果,本文首先针对膨胀土这一特殊黏土,对土体材料的压硬性和剪缩性的耦合现象进行理论上的适用性验证。由于目前许多本构关系的建模思路来自 Cam-Clay 模型,而 Cam-Clay 模型构造思路源于塑性关联流动,导致剪胀角大于实际值,意味着在剪切破坏过程中土体会严重压缩或膨胀。而依据应力剪胀理论推导

的剪胀角定义^[8]又来自于砂土等土体材料的试验依据,对于膨胀土这一特殊黏土并不适用。本文通过分析固结排水试验数据,以膨胀土的剪切应变与体应变的关系获得更精确的剪胀角值,进而研究膨胀土的广义塑性本构关系。

1 膨胀土室内试验

本文试验取用的膨胀土来自安徽某处高速公路工程,其相关指标见表 1。

表 1 膨胀土基本物理力学性能参数

最大干密度/($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	1.7
初始孔隙比/e	0.628
液限 $W_L/\%$	72
塑限 $W_P/\%$	30
土粒相对密度 G_s	2.68
自由膨胀率/ $\%$	44

1.1 试验方案

1.1.1 侧限压缩试验 该试验只对膨胀土施加竖向荷载并保证无侧向形变,需在固结仪内完成,如图 1a 所示。

试验时,将饱和后的膨胀土放入固结仪内,并施加竖向荷载,依次加载至 25 kPa、50 kPa、100 kPa、200 kPa、300 kPa、400 kPa、800 kPa、1600 kPa 等,要求保证各级加载结束时的竖向位移下降值不超过 0.01 mm/h。

1.1.2 常规三轴试验 固结排水试验三轴仪如图

[收稿日期] 2021-11-30

[基金项目] 国家自然科学基金(51708190)

[第一作者] 聂去尘(1996-),男,江苏南京人,湖北工业大学硕士研究生,研究方向为岩土工程。

[通信作者] 庄心善(1964-),男,河南周口人,湖北工业大学教授,研究方向为岩土工程及边坡工程。

1b 所示,由于剪切试验过程中不能出现超孔隙水压力,故应当控制剪切速率为 0.006 mm/min。



(a) 单杠杆式固结仪 (b) TSZ-2型应变式三轴仪

图 1 试验仪器

试验时将饱和度 B 检测值不小于 0.95 的膨胀土土样放入应变式全自动三轴仪器内,随后使试样分别在 100 kPa、200 kPa、300 kPa 的围压下充分排水固结,而后对土样施加附加轴向压力,且围压为定值,直至膨胀土被剪切破坏。

2 试验结果与分析

2.1 侧限固结试验

该试验以 $e - \lg P$ 曲线描述膨胀土的压缩性能,由图 2 可知,当竖向荷载加至 300 kPa 时, $e - \lg P$ 关系逐渐趋于线性,其斜率的绝对值即为压缩指标 C_c 。由表 2 可得压缩指数均小于 0.3,是压缩性较低的土,表明刚度较高。此外,该膨胀土所施加的荷载越高,则压缩模量 E_s 也就越大,表征膨胀土具有很强的压硬性。

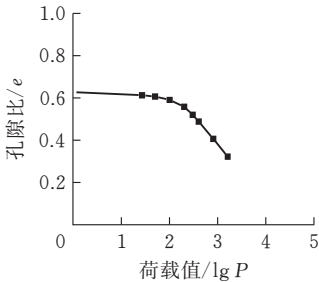


图 2 膨胀土 $e - \lg P$ 关系

表 2 固结试验结果

固结压力 P/kPa	各级荷载 $\lg P$	孔隙比/ e	压缩指 数 C_c	压缩模 量/ kPa
0	0	0.628	—	—
25	1.4279	0.613	0.011	2713.33
50	1.6990	0.607	0.022	6720.83
100	2.0000	0.591	0.053	5021.88
200	2.3010	0.558	0.109	4821.21
300	2.4771	0.521	0.210	4210.81
400	2.6021	0.489	0.256	4753.13
800	2.9031	0.407	0.272	7263.41
1600	3.2041	0.322	0.282	13242.35

2.2 三轴固结排水试验

2.2.1 压硬性 如图 3 所示,发现当膨胀土轴向应变增加到约 10% 时,剪应力 $\sigma_1 - \sigma_3$ 增势由陡峭渐趋于平缓,最终进入持续的应变状态;且在这一持续的

应变状态下,膨胀土所承受的围压越高则剪应力越大,且不同围压下剪应力破坏峰值增幅明显,表明膨胀土的强度随围压的增大有明显的提高,膨胀土的变形具有类似双曲线轨迹的硬化特征。这是由于外部压力压缩了膨胀土内部的孔隙空间,从而导致土粒与土粒之间的接触面积增大、咬合力更强,从而使得抗剪能力更高。

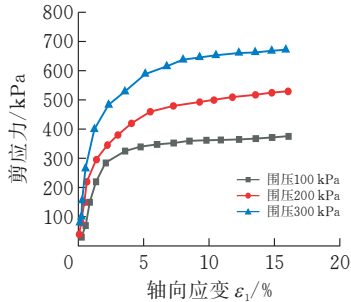


图 3 应力-应变曲线

2.2.2 剪缩性 由于固结排水剪切过程中,膨胀土还产生了体积减小的形变,由图 4 可知,当体应变达到约 1% 时剪应力增量基本呈线性,当应变超过 1% 时,剪应力的增量逐渐趋于平缓,这是因为土颗粒间受外力作用使其排列更加紧密,压缩了颗粒间的孔隙空间,从而发生了体积减小的形变,也就是膨胀土剪缩性的体现。

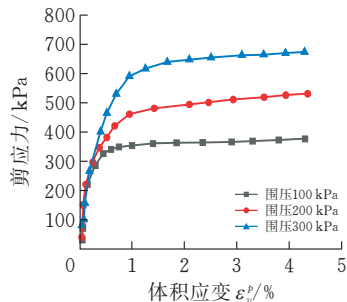


图 4 膨胀土的主应力差-体积应变曲线

由图 6 可知,轴向应变与体积压缩应变呈正相关,当轴向应变达到约 8% 时,体积应变减缓;当轴向应变已达到破坏应变时,体积应变几乎维持恒定,接近峰值。

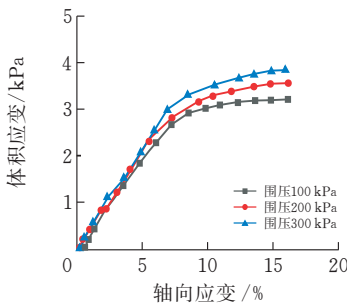


图 5 膨胀土的体变-轴向应变曲线

2.3 膨胀土压硬性与剪缩性的耦合

在固体变形中,应力的产生和传递是通过物体

的变形实现的,从这一概念出发,在正常固结剪切阶段,饱和膨胀土的剪缩效应使得土体受到压缩,其压硬效应使得土体难以被剪切以致破坏,而后的效应正是由于膨胀土的体积被压缩所致,即可以理解为膨胀土体积的压缩延缓了其受剪破坏趋势,应力应变关系如本文图 2、3、4、5 所示,呈双曲线函数关系,如本文的固结排水试验所表现的高围压下正常固结排水膨胀土的应变硬化现象。由此可以看出,膨胀土压硬性与剪缩性的耦合关系存在对彼此作用方式上的区别,剪应变通过剪缩直接影响体应变,体应变要通过改变抗剪能力间接影响剪应变;抗剪能力的改变都是来自于塑性体应变的作用,即塑性体应变的变化控制着抗剪能力的升降。如图 6 所示,清楚地表达了两者的相互作用的方式即耦合关系。

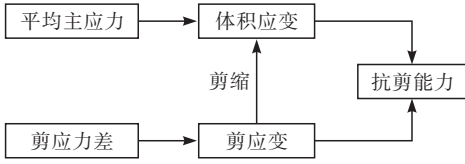


图 6 体积应变-剪应变的耦合关系

3 本构关系的修正

3.1 膨胀土剪胀角的选取

剪胀角是表征土体材料塑性应变与剪切应变之间夹角的量值,采用符号 ψ 描述,它反映了土体材料所受剪切应力与体积应力的耦合关系。若剪胀角与内摩擦角取值相同,便假定了广义塑性力学中的屈服面与塑性势面重合,即遵循关联流动法则,从而放大了土体的剪胀作用;若剪胀角取值偏高意味着在剪切破坏时会发生超出实际工程情况的体积膨胀现象^[9]。若忽略剪胀角,假定土体在受剪破坏过程中无体积变化,又违背工程设计的实际需求。于是在大量的平面应变工程选取剪胀角的问题中,许多学者通常取值为内摩擦角的 1/2,简便易得,但准确度不高。

为此,本文拟采用以下公式,结合试验数据得出较为精确的剪胀角值,公式^[10]如下:

$$\psi = \arcsin \left| \frac{\epsilon_v^p}{\epsilon_v^p - 2\epsilon_1^p} \right|$$

式中: ϵ_v^p 表示塑性体积应变, ϵ_1^p 表示塑性轴向应变。

3.2 Mohr-Coulomb 屈服条件

假定膨胀土为各向同性体,且三个主应力均已通过试验确定,由 Mohr-Coulomb 屈服准则的塑性本构理论^[11]可得以下推导过程,首先屈服准则可表示为:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0 \quad (1)$$

式中 σ_1, σ_3 取自三轴试验中的轴压值和围压值。

屈服条件式(1)还可以表示为:

$$f[I_1, J_2, \theta_\sigma] = \sqrt{J_2}(\cos\theta_\sigma - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}\sin\theta_\sigma) + \frac{1}{3}I_1\sin\varphi - c\cos\varphi = 0 \quad (2)$$

式中 I_1 是第一主应力不变量, J_2 是应力偏量第二不变量, θ_σ 是 Lode 角。

复合求导后,得塑性应变增量为:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta_\sigma} t_{ij} \right) \quad (3)$$

式中:

$$t_{ij} = \frac{\partial \theta_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{\sqrt{3}}{2(J_2)^{3/2}\cos 3\theta_\sigma} (s_{im}s_{mj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij} - \frac{3}{2}\frac{J_3}{J_2}s_{ij}) \quad (4)$$

屈服函数 F 对应力张量 σ_{ij} 的偏导数运算,可得:

$$d\epsilon^p = d\lambda \sqrt{\frac{4J_2}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial J_2} \right)^2 + \frac{1}{3J_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_\sigma} \right)^2} \quad (5)$$

式中 $d\epsilon^p$ 为累计塑性应变增量。

将式(4)代入式(5)可得:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda (\beta_1 \delta_{ij} + \beta_2 s_{ij} + \beta_3 t_{ij}) \quad (6)$$

式(6)括号中的的第一项反映塑性体积应变增量,后面二项反映塑性偏应变增量,其中各系数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别为:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{1}{3}\sin\varphi, \\ \beta_2 &= \frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}}(\cos\theta_\sigma - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta_\sigma\sin\varphi), \\ \beta_3 &= \frac{\partial f}{\partial \theta_\sigma} = -\sqrt{J_2}\sin\theta_\sigma + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta_\sigma\sin\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

依据非关联流动法则,将以上屈服函数 F 式中的内摩擦角 φ 值替换为剪胀角 ψ 值。

使用式(5),并利用式(7),则有

$$d\epsilon^p = \frac{1}{3}d\lambda \sqrt{3 + \sin^2\psi} \quad (8)$$

进而得:

$$d\epsilon_v^p = d\epsilon^p \frac{3\sin\psi}{\sqrt{3 + \sin^2\psi}} \quad (9)$$

3.3 Mohr-Coulomb 本构关系的验证与预测

由试验结果可整理得到累积塑性应变和体积应变的关系如图 7 所示,当体积应变超过 1% 时,膨胀土的累积塑性应变与体积应变的增长趋势基本呈线性关系,这一现象验证了式(9)中推导的累积塑性应变增量与体积应变增量的比值呈与剪胀角值相关的线性变化趋势、且该比值基本保持恒定这一结论。

并且进一步由图 7 可拟合得出这两个变量的斜

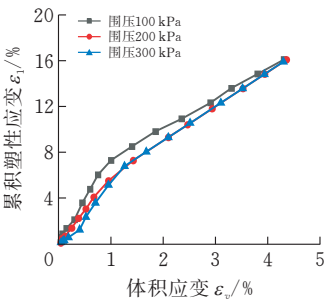


图 7 累积塑性应变-体积应变曲线

率,即累积塑性应变与塑性体积应变的微分关系,如图 8 所示,为不同围压下膨胀土的累积塑性应变与体积应变的曲线关系与其拟合曲线图的对照,可知在围压分别为 100 kPa、200 kPa、300 kPa 时,随着塑性体积应变的增加,累积塑性应变基本呈线性增长,并得出拟合公式:

$$Y_1 = 3.644 \times X_1 + 1.736 \tag{10}$$

$$Y_1 = 3.782 \times X_2 + 0.822 \tag{11}$$

$$Y_1 = 3.187 \times X_3 + 0.545 \tag{12}$$

式中 Y_1 、 Y_2 、 Y_3 表示 $d\epsilon_p$, X_1 、 X_2 、 X_3 表示 $d\epsilon_v$ 。符合理论模型预测式(10)–(12)的二元一次方程形式,如表 3 所示,从而可验证该本构模型的适用性。由表 3 可知系数 ζ 拟合度较高,相对误差较小,证明基于 Mohr-Coulomb 屈服准则的本构关系对于预测膨胀土的强度与变形力学特性具有高度的适用性。

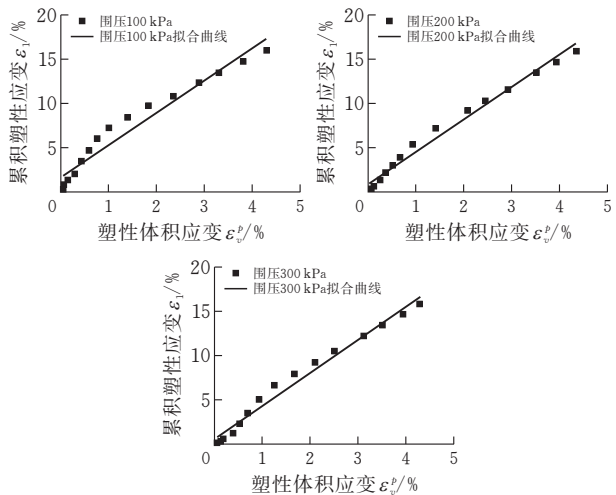


图 8 围压 300 kPa 的累积塑性应变-体积应变关系

表 3 累积塑性应变增量与体积应变增量比值系数 ζ

土样围压/kPa	实测 ζ 值	模型预测 ζ^* 值	拟合度 R^2	相对误差/%
100	3.644	4.25	0.951	0.166
200	3.782	3.968	0.984	0.049
300	3.687	3.942	0.981	0.069

4 结论

1)通过侧限固结试验、常规三轴压缩试验分别

验证了膨胀土压硬性 与剪缩性的耦合关系,并且得出第一主应力形变是体应变的约 4 倍,其形变均呈现应变硬化特性,由于未能把应变软化包括进来,因此还不能很好描述当膨胀土出现强度峰值以后的变形特性。

2)本文对剪胀角的定义给出的基于固结排水试验结果相关的塑性体积应变与轴向应变的数学公式可较精确地定义剪胀角,从而进一步提高膨胀土剪应力与静水压力的耦合关联度。

3)证明了 Mohr-Coulomb 本构模型对研究膨胀土的变形特性具有很强的适用性,非关联流动法则的实现也较为方便,本文只将内摩擦角 φ 值替换成剪胀角 ψ ,从而修正了膨胀土的本构关系,且参数易测,这一模型特别有利于测定土体变形指标后针对平面应变问题的工程计算。

[参 考 文 献]

[1] 赵明华.土力学与基础工程[M].武汉:武汉理工大学出版社,2014.

[2] 王靖涛.论岩土塑性体应变与剪应变的相互作用原理[J].中国工程科学,2006,8(09):24-34.

[3] WANG J T, DING M Y. Inverse problems in modeling the constitutive relations of rock and soil[A]. Proceedings of the tenth int. conference on computer methods and advances in geomechanics[C].Tucson: A A Balkema Rotterdam/Brookfield, 2001: 413-416.

[4] 罗刚,张建民,邓肯-张模型和沈珠江双屈服面模型的改进[J].岩土力学,2004,25(06):887-890.

[5] ROWE P W.The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact[J]. Proceedings of the Royal Society Series A,1962,269: 500-527.

[6] 李朝阳,谢强,康景文.基于摩尔库仑准则的膨胀土弹塑性本构模型及其数值实现[J].土木建筑与环境工程,2017,39(02):92-99.

[7] 任青阳,王靖涛.不同含水量膨胀土本构关系的三轴试验研究[J].土工基础,2005,19(05):55-57.

[8] BANARJEE P K,STIPHO A S.Associated and non-associated constitutive relations for undrained behaviour of isotropic soft-clays[J].International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics , 1978,2(01):35-36.

[9] 孔位学,芮勇勤,董宝弟.岩土材料在非关联流动法则下剪胀角选取探讨[J].岩土力学,2009,30(11):3278-3282.

[10] 郝明辉,陈厚群,张艳红.ABAQUS 中剪胀角的选取探讨[J].水力学报,2012,43(01):91-97.

[11] 陈明祥.弹塑性力学[M].北京:科学出版社,2007.