

[文章编号] 1003-4684(2021)04-0004-04

基于修正量测的 UKF 算法

崔 灿¹, 刘 攀¹, 张 敏²

(1 湖北工业大学机械工程学院, 湖北 武汉 430068; 2 湖北工业大学工程技术学院, 湖北 武汉 430068)

[摘 要] 针对 Kalman 滤波(UKF)不能解决非线性算法的难点,在 Kalman 滤波的算法上加以改进。由于(UKF)算法需要利用无迹变换(UT)求解非奇异协方差矩阵的平方根,但在求解奇异协方差矩阵或滤波计算时会有较大的误差,导致算法的精度无法保证。提出了一种基于修正测量 UT 变换的修正测量 UKF 算法来处理奇异协方差矩阵来解决这一问题,并通过仿真验证了该方法的有效性。

[关键词] 无迹滤波; UT 变换; 修正量测; 奇异矩阵

[中图分类号] TN911 [文献标识码] A

在许多实际问题中,大量的滤波问题都是非线性的,解决非线性滤波问题的两种主要方法都是基于卡尔曼滤波,卡尔曼滤波是一种高效率的递归滤波器(自回归滤波器),它能够从一系列的不完全包含噪声的测量中,估计动态系统的状态,然而简单的卡尔曼滤波必须应用在符合高斯分布的系统中。第一种就是扩展 Kalman 滤波(EKF),它只取非线性函数泰勒展开式的一阶线性段,其高阶项舍去,来到达线性化的目的。通过将非线性的阶段线性化,然后舍弃高阶项或逼近的方法来处理非线性问题^[1]。然而,当非线性函数的泰勒展开不能舍弃时,这种线性化会造成函数的较大误差,甚至对最终的滤波结果造成很大影响。另一种是通过采样的方法来逼近非线性分布的方法,将固定数量的参数支近似一个高斯分布的 UT 变换作为基础,使用 Kalman 线性滤波框架,并且采样不是随机采样,而是采取确定的 sigma 点,这种方法是无迹 Kalman 滤波^[2],并且它可以达到泰勒三阶的近似效果。UKF 无迹卡尔曼滤波是在卡尔曼滤波和变换的基础上发展而来的,它是利用无损变换使线性假设下的卡尔曼滤波应用于非线性系统,但是在 UKF 的计算中,当存在随机向量相关或奇异矩阵的时候^[3],则不能采用 Cholesky 分解,该分解是把一个对称正定的矩阵表示成一个下三角矩阵 L 和其转置的乘积的分解。这将影响方差矩阵平方根的计算,进而严重影响 sigma 点的求解^[4]。本文就上述问题引入修正量测,将一个正定矩阵替换之前的奇异矩阵,使得协方差阵转化为正定矩阵,进而可以使滤波正常进行^[5]。

1 修正量测 UKF

上文提到传统的做法是将非线性函数转变为线性化来解决问题^[6],而无迹卡尔曼滤波运用的是滤波框架和无迹变化来处理预测方程中的均值问题和协方差非线性传递问题^[7]。无迹卡尔曼滤波算法逼近非线性函数的概率密度分布,并用一系列确定的样本来逼近状态的后验概率密度^[8]。无迹卡尔曼滤波流程为:

$$\text{非线性系统} \quad \begin{cases} X_{k+1} = f(x_k, W_k) \\ Z_k = h(x_k, V_k) \end{cases}$$

W_k 中包含协方差矩阵 Q , V_k 中包含协方差阵 R

$$\begin{aligned} X_{k,k}^{(i)} &= [\hat{X}_{k,k} \hat{X}_{k,k} + \sqrt{(n+\lambda)P_{k,k}}] \\ &\quad \hat{X}_{k,k} - \sqrt{(n+\lambda)P_{k,k}}] \\ X_{k+1,k}^{(i)} &= f[k, X_{k,k}^{(i)}] \\ \hat{X}_{k+1,k} &= \sum_{i=0}^{2n} \omega^{(i)} X_{k+1,k}^{(i)} \\ P_{k+1,k} &= \sum_{i=0}^{2n} \omega^{(i)} [\hat{X}_{k,k} -]^\text{T} \cdot \\ &\quad \hat{X}_{k+1,k} - X_{k+1,k}^{(i)}] + Q_k \\ X_{k+1,k}^{(i)} &= [\hat{X}_{k+1,k} \hat{X}_{k+1,k} + \sqrt{(n+\lambda)P_{k+1,k}}] \\ &\quad \hat{X}_{k+1,k} - \sqrt{(n+\lambda)P_{k+1,k}}] \\ Z_{k+1,k}^{(i)} &= h[X_{k+1,k}^{(i)}] \\ \bar{Z}_{k+1,k} &= \sum_{i=0}^{2n} \omega^{(i)} Z_{k+1,k}^{(i)} \\ p_{z k z k} &= \sum_{i=0}^{2n} \omega^{(i)} [Z_{k+1,k}^{(i)} - \bar{Z}_{k+1,k}] \cdot [-\bar{Z}_{k+1,k}]^\text{T} + R \\ P_{x k z k} &= \sum_{i=0}^{2n} \omega^{(i)} [X_{k+1,k}^{(i)} - \bar{Z}_{k+1,k}] \cdot [-\bar{Z}_{k+1,k}]^\text{T} \\ K_{k+1} &= P_{x k z k} P_{z k z k}^{-1} \end{aligned}$$

[收稿日期] 2021-04-14

[第一作者] 崔 灿(1993-),男,湖北武汉人,湖北工业大学硕士研究生,研究方向为制造业信息化,机器人技术,计算机仿真

$$\begin{aligned} X_{k+1,k+1} &= X_{k+1,k} + K_{k+1} [Z_{k+1} - \hat{Z}_{k+1,k}] \\ P_{k+1,k+1} &= P_{k+1,k} - K_{k+1} P_{z,k} K_{k+1}^T \end{aligned}$$

其中 n 是状态向量维数, $(\sqrt{P})^T (\sqrt{P}) = P$, $(\sqrt{P})_i$ 表示矩阵方根第 i 列, 参数 $\lambda = \alpha^2 (n + k) - n$ 是一个缩放比例因子, α 是一个常数, 控制了采样点的分布状态, k 是一个二级标度参数, 通常设置为 0 或者 $3 - n$, β 用来结合均值分布和先验知识, 权重为 ω 由下面给出

$$\begin{cases} \omega_m^{(0)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} \\ \omega_c^{(0)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ \omega_m^{(i)} = \omega_c^{(i)} = \frac{\lambda}{2(n + \lambda)}, i = 1 \sim 2n \end{cases}$$

可以看出一旦产生奇异矩阵, UT 变换时, 算法精度会受到很大的影响, 严重影响着算法的收敛。换言之, 协方差矩阵 R 必须局部修正。因此, 通过数次试验后本文选择了一个正定矩阵

$$R'_\psi = \sigma_\psi^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用来替换之前的协方差矩阵, 整个协方差为正定矩阵, 继而在滤波器中可以使用构造的 C-UKF (Correction Unscented Kalman Filter) 算法。然而, 这种调整需要付出相应的代价, 调整之后的 R' 不等于先前的 R , 导致滤波器变为次优^[9]。下文将对这种调整进行具体研究。

2 仿真实验设计与验证

在雷达跟踪系统的东-南-高 (ESU) 的坐标系中 (图 1), 方位角 ψ 的取值范围一般为 $-\pi < \psi \leq \pi$ 若此时存在一架飞行器穿过 YOZ 平面自西向东进行飞行, 那么此时雷达跟踪系统的观测值会从 π 瞬间突变到 $-\pi$, 如图 2 所示。

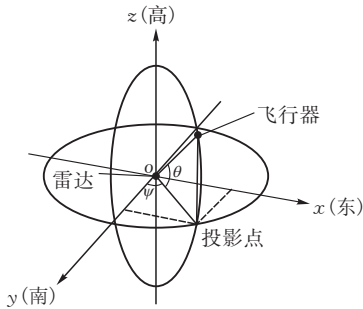


图 1 飞行器坐标系

如果方位角和量测信号突变, 将导致滤波器发散。选用方位角的余弦和正弦值代替方位角信息, 观测向量等效为

$$[\rho \theta \cos(\psi) \sin(\psi)]$$

式中: ρ 为雷达到目标的距离; θ 为俯仰角; 在 UKF

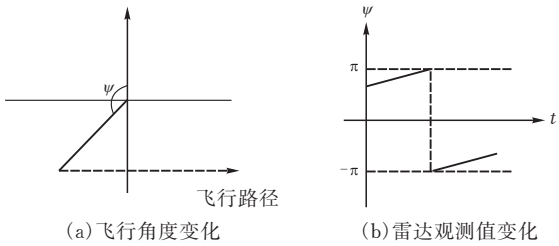


图 2 飞行角度与雷达观测值变化

中若要求得量测值的协方差矩阵, 使方位角 ψ 测量误差为 σ_ψ^2 , 将方位角值转化为方位角的测量矢量

$$V_\psi = [\cos(\psi) \sin(\psi)]^T$$

令 ψ 的微小变化量为 $\delta\psi$, 可得微小变化量 δV_ψ

$$\begin{aligned} \delta V_\psi &= [-\sin(\psi) \delta_\psi \cos(\psi) \delta_\psi]^T = \\ &[-\sin(\psi) \cos(\psi)]^T \delta_\psi \end{aligned}$$

令微小变化量 δ_ψ 代表方位角 ψ 的测量误差, 可以得到 V_ψ 的协方差矩阵

$$\begin{aligned} R_\psi &= E(\delta V_\psi \cdot \delta V_\psi^T) = \\ E(\delta_\psi^2 \begin{bmatrix} -\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}) &= \\ \sigma_\psi^2 \begin{bmatrix} \sin^2(\psi) & -\sin(\psi) \cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \cos(\psi) & \cos^2(\psi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将雷达系统中的协方差矩阵视为非奇异矩阵。将方位角信息转化为 V_ψ , 造成量测的局部相关性, 且 R_ψ 是奇异矩阵, 表现在协方差矩阵上为

$$|R_\psi| = \sigma_\psi^2 \begin{vmatrix} \sin^2(\psi) & -\sin(\psi) \cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \cos(\psi) & \cos^2(\psi) \end{vmatrix} = 0$$

在这种情况下, 则

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\psi^2 \sin(\psi) & -\sigma_\psi^2 \sin(\psi) \cos(\psi) \\ 0 & 0 & -\sigma_\psi^2 \sin(\psi) \cos(\psi) & \sigma_\psi^2 \cos^2(\psi) \end{bmatrix}$$

R 在这里必为奇异矩阵。

在三维空间中, 设定飞行器以恒定的速度在飞行, 在 ESU 坐标系下, 地面有一雷达对其进行观测。其状态方程在 n 时刻表示为

$$X_n = [x \quad \dot{x} \quad y \quad \dot{y} \quad z \quad \dot{z}]$$

状态转移方程为

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_n + \Gamma v_n$$

式中: τ 为采样时间间隔, 令 $\tau = 0.1$; v_n 是均值为零的高斯白噪声, 方差 $\sigma_v^2 = 1$; Γ 为状态误差分布矩阵, 即

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tau^2/2 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2/2 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2/2 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix}$$

目标到达雷达距离 ρ , 俯仰角 θ , 方位角 ψ , 这三个参数构成了雷达的观测向量 $\boldsymbol{Z} = [\rho \ \theta \ \psi]^\text{T}$, 观测方程为

$$\boldsymbol{Z}_n = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan^{-1}(z / \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \tan^{-1}(x / y) \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_n$$

式中: \boldsymbol{w}_n 是由高斯随机变量组成的向量, 协方差矩阵是

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 60^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01^2 \end{bmatrix}$$

修改之后的观测方程为

$$\boldsymbol{Z}'_n = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan^{-1}(z / \sqrt{x^2 + y^2}) \\ y / \sqrt{x^2 + y^2} \\ x / \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_n$$

相应的, \boldsymbol{w}'_n 与上文相似, 其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 60^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01^2 \end{bmatrix}$$

仿真试验分两个方面进行:

- 1) 设定飞行轨迹使之不通过角度突变区域, 图 3 所示。
- 2) 设定飞行轨迹使之通过角度突变区域, 如图 4 所示。

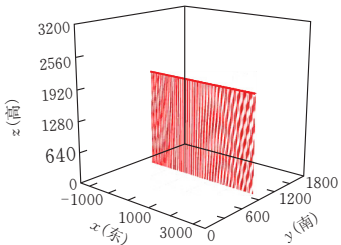


图 3 飞行轨迹(经过角度突变)

在雷达系统中, 两种方法对位移的估计性能如图 3 所示, 以速度为测量的雷达系统中, 两种方法对速度的估计性能如图 4 所示。对象图表中的误差估计是由 AVE(Absolute value error)与 RMSE(Root Mean Square Error)得到, 可表示为:

$$\text{AVE}(k) = \sqrt{(X_k - \hat{X}_k^m)^2}$$

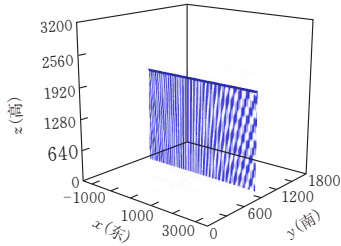
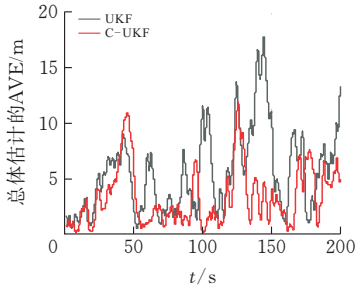


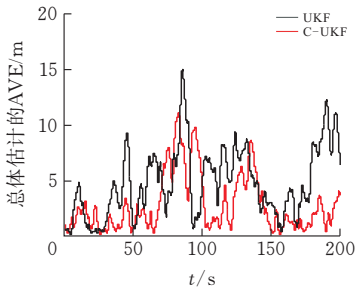
图 4 飞行轨迹(不经过角度突变)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_k - \hat{X}_k^m)^2}$$

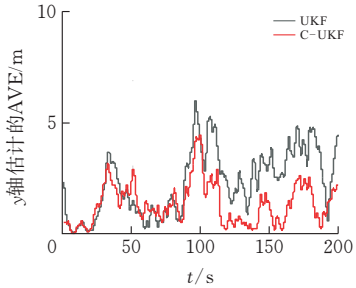
X_k 为真实值, \hat{X}_k^m 为预测值, N 为总仿真时间步数。



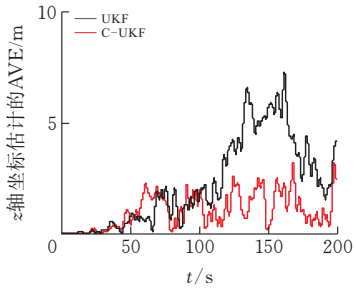
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5 仿真结果图

仿真结果: 上述仿真分别是飞行器通过角突变

区时,轨迹在 X,Y,Z 轴上位置的均方根误差。当我们使用一个较小的值替换奇异矩阵的原值时^[10],虽然会损失一定的滤波精度,对奇异矩阵进行了修改,但是解决原先滤波中奇异协方差矩阵的问题,使得 C-UKF 精度比传统 UKF 精度更高,对于滤波中的奇异矩阵误差变大的问题具有更好的解决性能。

3 结束语

通过雷达观测飞行器时角度突变的问题^[11],将导致滤波器发散的情况来仿真对比 UKF 和 C-UKF 算法^[12]。实验结果表明,C-UKF 通过 Cholesky 分解,进而选取 sigma 点,使正定矩阵替换之前的奇异矩阵,通过修正量测的 UT,很好的处理了奇异矩阵的问题,让其自身变得精度更高。

[参 考 文 献]

[1] 王伟,丛宁,邬佳.一种鲁棒 GPS/INS 组合导航滤波算法设计[J].哈尔滨工程大学学报,2021,42(2):240-245.

[2] 王硕,宋申民,于滢,等.基于组合导航系统的非线性高斯滤波算法[J].控制与决策,2016(9):1645-1653.

[3] 谢兰天.基于载波相位差分的 GPS/INS 紧组合导航算法研究[D].武汉:武汉大学,2018.

[4] 易清明,陆景龙,石敏.GPS/INS 组合导航中两步自适应滤波方法[J].航天控制,2018,36(2):59-64+87.

[5] 高少甫. GPS/INS 紧耦合融合定位算法的研究与实现[D].郑州:郑州大学,2018.

[6] 何康辉,董朝阳.基于正交变换的五阶容积卡尔曼滤波导航算法[J].系统工程与电子技术,2020,42(3):680-685.

[7] WU H,CHEN S,YANG B,et al. Robust derivative-free cubature kalman filter for bearings-only tracking[J]. 中南大学学报(英文版),2016,23(6):1399-1405.

[8] 卓奕弘,姜秋喜,刘鑫,等.解决雷达方位角突变问题的一种方法[J].现代雷达,2019(3):53-57.

[9] CARON F,DUFLOS E,POMORSKI D,et al. GPS/IMU Data Fusion using multisensor Kalman filtering: Introduction of contextual aspects[J]. Information Fusion,2017,7(2):221-230.

[10] 史密,牟京燕,陈树新. GPS 诱骗下 GPS/INS 组合导航偏差分析[J].电光与控制,2016(2):16-20.

[11] YOU D,LIU P,SHANG W,et al. An improved unscented kalman filter algorithm for radar azimuth mutation[J]. International Journal of Aerospace Engineering,2020,2020(12):1-10.

[12] 肖磊,王绍举,常琳,等.采用自适应无迹卡尔曼滤波的卫星姿态确定[J].光学精密工程,2021,29(3):637-645.

UKF Algorithm Based on Modified Measurement

CUI Can¹, LIU Pan¹, ZHANG Min²

(1 School of Mechanical Engineering, Hubei Univ. of Tech., Wuhan 430068,China;

2 Engineering and Technology College, Hubei Univ. of Tech., Wuhan 430068, China)

Abstract: Directed at the difficulty that Kalman Filtering cannot solve the pain points of non—linear algorithms, an Unscented Kalman Filter (UKF) is proposed. This algorithm needs to use the unscented transformation (UT) to find the square root of a non—singular covariance matrix, but it is solving Or a large error will occur in the filtering calculation, and the accuracy of the algorithm cannot be guaranteed. In order to analyze this problem, a UT transform based on modified measurement is proposed to deal with the singular covariance matrix, which constitutes the modified measurement UKF algorithm, and the effectiveness of this method is proved by simulation.

Keywords: unsmoothed filtering; ut transformation; corrected measurement; singular matrix

[责任编辑: 张岩芳]