

[文章编号] 1003—4684(2020)04-0075-05

GM(1,1)灰色模型在软基沉降预测中的应用

胡其志^{1,2}, 刘 恒¹, 田 锐¹

(1 湖北工业大学土木建筑与环境学院, 湖北 武汉 430068;

2 湖北省桥梁安全监控技术与装备技术工程中心, 湖北 武汉 430068)

[摘 要] 依托武穴长江大桥北岸接线段工程,根据沉降监测实测数据,采用三次样条插值方法将非等时距实测数据转换成等时距序列,建立等时距灰色 GM(1,1)模型。利用 matlab 编程对模型进行计算,对处理后的软基沉降进行预测。利用经典的双曲线法和三点法分别进行沉降预测,并将预测曲线与基于等时距的灰色模型预测曲线进行对比,结果表明:灰色 GM(1,1)模型预测精度更高,预测结果更可靠。基于等时距的灰色模型为软基处理后的沉降预测提供一种重要方法,对软基处理的施工具有一定的指导意义。

[关键词] 灰色模型; 软土处理; 高速公路; 沉降预测

[中图分类号] U416.1, TU196.2 **[文献标识码]** A

在高速公路建设施工过程中,为避免造成经济损失和人员伤亡,对软土路基沉降提出了较高要求。因此,有效掌握软基沉降的发展规律并准确预测分析最终沉降对于指导工程施工、降低工程成本、确保工程质量具有极为重要的实际意义。

软土路基的沉降变形是一个影响因素众多、变化漫长的过程,如何能在较短时间内得到较为准确的结果^[1],国内外学者对软土路基沉降预测进行了大量的研究工作。目前常用的曲线拟合预测方法有理论计算法、拟合曲线法^[2]、Asaoka 法^[3]、遗传人工神经网络法^[4]等。黄广军^[5]用数学方法对预测地基沉降的 Asaoka 法的表达式进行分析,探讨其拟合参数的误差对沉降预测结果的影响,提出了拟合参数误差放大系数的概念,并对预测结果的可靠性进行分析和评估。杨涛^[6]等基于双曲线拟合法,推导出恒载下地基沉降速率与剩余沉降之间的关系式、剩余沉降与工后沉降之间的关系式,据此建立了超载预压卸荷沉降速率标准的计算公式,并给出公式中相关参数的确定方法。万臣^[7]等基于组合预测思想,结合 BP 神经网络和马尔科夫链 2 种预测方法,构建了一种新维 BP 神经网络—马尔科夫链大坝沉降预测模型。但是,大部分预测方法未全面考虑软土路基沉降的影响因素,或者算法冗繁不易实现,对预测精度产生影响。

灰色理论^[7-10]具有理论性强、应用价值高等优

点,是将复杂离散的非等时距实测沉降数据处理成以一定规律变化的等时距序列,建立微分方程对后期沉降进行数据预测,其算法简洁明晰,且避免分析软土路基沉降影响因素,提高了沉降预测精度。

由于受到施工环境和监测条件的限制,部分地基处理工程未能测取到足够多的沉降数据。针对传统的双曲线法、三点法沉降预测模型的不足,将实测数据等时距化并采用灰色 GM(1,1)模型建立微分方程对软基沉降进行预测分析,并验证灰色理论的适用性,最后将三种模型预测结果进行对比分析,为其他同类研究提供借鉴。

1 GM(1,1)灰色模型

灰色系统理论由我国学者邓聚龙教授于 1982 年创立,以“部分信息已知,部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象,主要通过部分已知信息的生成、开发,提取有价值的信息,通过序列算子的作用实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控。其特点是“少数据建模”,着重研究“外延明确,内涵不明确的对象”。由于灰色系统理论对实验观测数据没有特殊的要求和限制,因此在工程建设、经济管理、农业科学、控制科学、生命科学等领域得到广泛应用。

1.1 建立模型

由于沉降监测受到现场施工条件、环境气候等

[收稿日期] 2019—12—02

[基金项目] 国家自然科学基金项目(51609081)

[第一作者] 胡其志(1969—),男,湖北红安人,湖北工业大学教授,研究方向为路基工程,岩土工程

[通信作者] 刘 恒(1992—),男,湖北武穴人,湖北工业大学硕士研究生,研究方向为软基处理

因素的影响,其实测沉降数据为非等时距序列,在建立模型之前利用三次样条^[11]插值法将其等时距。实测数据在等时距后的序列为 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(N)\}$ 。对等时距的系列进行一次累加得:

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(N)\} \tag{1}$$

假设式(1)中的 $X^{(1)}$ 满足一阶常微分方程:

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = u$$

其中: a 是常数,称为发展灰数; u 称为内生控制灰数,是对系统的常定输入。

对等时距取样的离散值表达($t_0=1$)为:

$$X^{(1)}(k+1) = \left[X^{(1)}(1) - \frac{u}{a} \right] e^{-ak} + \frac{u}{a} \tag{2}$$

灰色建模途径是将等时距后的序列进行一次累加,得到式(1)的累加系列,后采用最小二乘法来估计常数 a 与 u 。构造数据矩阵如下:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} [x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)] & 1 \\ -\frac{1}{2} [x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)] & 1 \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{2} [x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)] & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$U = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} \tag{4}$$

联立式(3)和式(4),用最小二乘法估计可得:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T y \tag{5}$$

把估计值 \hat{a} 与 \hat{u} 代入式(2)并结合式(5)可得时间响应方程:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(1)}(1) - \frac{\hat{u}}{\hat{a}} \right] e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{u}}{\hat{a}} \tag{6}$$

当 $k=1,2,\dots,N-1$ 时,由式(6)算得的 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 是拟合值;当 $k \geq N$ 时, $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 为预测值。这是相对于一次累加序列 $x^{(1)}$ 的拟合值,用后减运算还原,当 $k=1,2,\dots,N-1$ 时,就可得原始序列 $x^{(0)}$ 的拟合值 $\hat{x}^{(0)}(k+1)$;当 $k \geq N$,可得原始序列 $x^{(0)}$ 的预测值。

1.2 精度检验

采用后验差检验, $x^{(0)}$ 的方差

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x^{(0)}(k) - \bar{X}]^2}$$

其中: \bar{X} 为 $x^{(0)}$ 的均值。

残差的方差

$$S_2 = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^N [E(k) - \bar{E}]^2}$$

其中: $E(k)$ 为残差, \bar{E} 为残差的均值。

后验差比值

$$C = \frac{S_2}{S_1}$$

小误差概率

$$P = P\{|E(k) - \bar{E}| < 0.6745S_1\}$$

以上所得后验差比值 C 和小误差概率 P 按表1对计算精度进行综合评价。若 C 和 P 都在规定的范围内,其中 C 越小越好(即原始序列方差大而残方差小), P 越大越好(即残差与残差均值之差小于给定值 $0.6745S_1$)。因此表1中 P 的数字大, C 的数字小,那么预测的精度就好,反之就不合格,则所建立的灰色模型精度符合要求;否则,需对残差进行修正,直到精度符合要求为止。

表1 预测精度对照表

预测精度	P	C
好	>0.95	<0.35
合格	>0.80	<0.45
勉强	>0.70	<0.50
不合格	≤0.70	≥0.65

2 工程应用

2.1 工程概况

武穴长江大桥北岸接线段软土路段总长约5762 m,主要分布于K149+509—K152+504 黄泥湖农场段及K155+820—K159+346 长江北岸冲积平原段,占路线全长约31.2%。主要为淤泥、淤泥质土,间夹软塑—流塑状态的粘性土以及软弱的粉土,静力触探PS值普遍≤0.75,埋深较浅,软土厚度多在5~12 m之间。采用固结排水对软土进行处理,软土段路基采用挖除换填、水泥搅拌桩、水泥搅拌桩和欠载预压及水泥搅拌桩和等载预压四种处理措施,预压期为4—6个月,并在堆载预压的过程中进行沉降监测。

沉降监测按照设计要求埋设沉降板,采用二等水准测量对路基沉降进行观测。本文选取K150+480典型断面作为考查对象,其堆载预压高度随时间变化曲线和实测沉降量随时间变化曲线如图1所示。其实测沉降数据与时间间隔如表2所示。其中数据采集的频率为:时间数据周期为4—6个月,现场总沉降量数据为:222.51~327.94 mm之间。

2.2 GM(1,1)灰色系统模型预测

根据图1和表2中K150+480断面的实测沉降数据,依次选取前10组、15组、20组实测沉降数据,并利用MATLAB对序列采用三次样条插值方法进行等时距处理后,对该断面的后期沉降进行预测。利用MATLAB软件将三次样条插值方法处理成等距离序列的具体过程为:1)输入时间序列;2)输

入初始数值;3)进行循环;4)程序得出函数的曲线;
5)将依次得出的曲线连成一段完整曲线;6)超出时
间序列终止程序、程序运行结束。

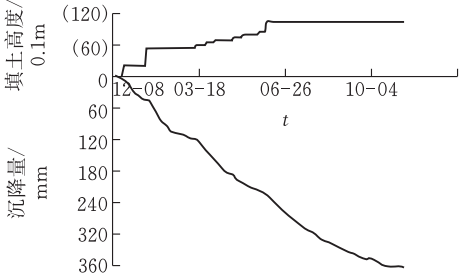


图 1 K150+480 断面总沉降量-填土高度-时间

表 2 K150+480 断面实测沉降数据

序号	t/d	总沉降量/mm	$\Delta t/d$
1	197	222.51	0
2	202	226.89	5
3	205	235.65	3
4	211	246.61	6
5	217	255.76	6
6	223	261.36	6
7	226	266.70	3
8	232	274.82	6
9	240	281.33	8
10	244	286.49	4
11	248	290.87	4
12	251	294.73	3
13	256	297.95	5
14	262	306.50	6
15	265	308.75	3
16	271	311.43	6
17	277	317.19	6
18	284	320.07	7
19	286	324.64	2
20	293	327.94	7

2.2.1 选择前 10 组数据进行预测 将前 10 组数据
利用 MATLAB 软件采取三次样条插值方法处理成
等时距序列,三次样条插值如图 2 所示。

前 10 组数据序列预测公式:

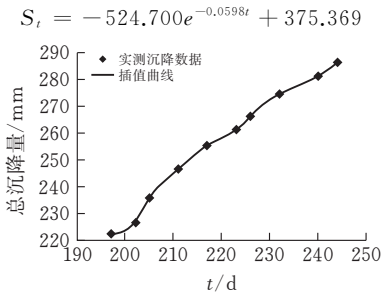


图 2 K150+480 断面取 10 组数据三次样条插值

2.2.2 选择前 15 组数据进行预测 将前 15 组数据
利用 MATLAB 软件采取三次样条插值方法处理成
等时距序列,三次样条插值如图 3 所示。

前 15 组数据序列预测公式:

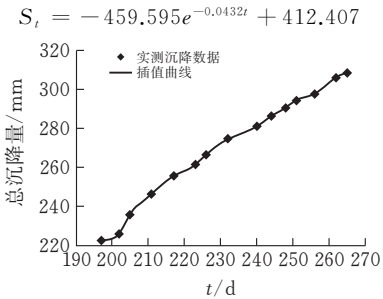


图 3 K150+480 断面取 15 组数据三次样条插值

2.2.3 选择前 20 组数据进行预测 将前 15 组数据
利用 MATLAB 软件采取三次样条插值方法处理成
等时距序列,三次样条插值如图 4 所示。

前 15 组数据序列预测公式:

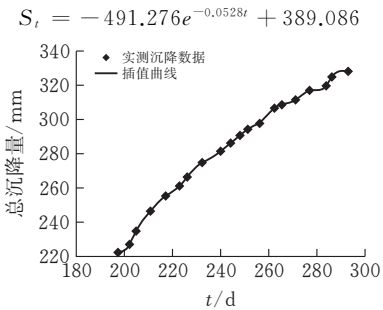


图 4 K150+480 断面取 20 组数据三次样条插值

2.2.4 计算时间参数 当选取 10 组、15 组、20 组
数据采用三次样条插值法等时距处理进行灰色模型
预测时,对应的时间序列分别为:

$$T_{10} = 5.2222d; T_{15} = 4.8571d$$
$$T_{20} = 5.0526d$$

其中 $d = 1, 2, 3, \dots, n$ 。时间序列如表 3 所示。

表 3 时间序列

t/d	10 组	15 组	20 组
302	301.4	303.9	303.1
307	306.7	308.7	308.2
312	311.9	313.6	313.2
317	317.1	318.4	318.3
322	322.3	323.3	323.3
327	327.6	328.1	328.4
332	332.8	333.0	333.4
337	338.0	337.9	338.5
342	343.2	342.7	343.5
347	348.7	347.6	348.6
352	353.7	352.4	353.6
357	358.9	357.3	358.7

3 成果分析

选取 10 组、15 组、20 组采用 GM(1,1)灰色模
型预测曲线和实测沉降数据曲线对比如图 5 所示。

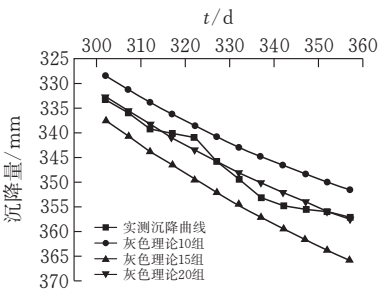


图 5 K150+480 断面 G(1,1)预测与实测沉降

由图 5 可知，在选取实测数据组数较多的情况下，沉降预测曲线的变化趋势就与实测沉降曲线越接近，预测结果就越精确。反之，在选取的实测数据组数较少的情况下，沉降预测曲线收敛速度较快，与实测沉降曲线的变化趋势产生了较大的偏离，预测结果精确性较差，说明选取的实测数据序列维数对灰色理论预测有直接的影响。第 302~357 d 预测沉降数据与实测沉降数据对比如表 4 所示。

表 4 不同数据组数时灰色理论预测值与实测值分析

t/d	实测值	10 组		15 组		20 组	
		预测值	相对误差/%	预测值	相对误差/%	预测值	相对误差/%
302	333.23	328.39	−1.45	337.53	1.29	332.67	−0.17
307	335.99	331.16	−1.44	340.70	1.40	335.57	−0.13
312	339.08	333.78	−1.56	343.73	1.37	338.33	−0.22
347	355.49	348.34	−2.01	361.65	1.73	354.02	−0.41
352	355.98	349.97	−1.69	363.80	2.20	355.82	−0.04
357	357.15	351.50	−1.58	365.85	2.44	357.52	0.10

表 4 显示，在利用灰色模型预测时，选取的实测沉降数据序列组数越多，预测结果的相对误差就越小，反映出预测结果越精确。说明选取的实测数据序列组数越多，预测曲线的变化趋势与实测沉降曲线越吻合，预测结果越可靠。

基于第 302~357 d 实测沉降数据，利用双曲线法和三点法进行沉降预测。双曲线法是一种基于纯经验的拟合方法，沉降量计算公式为：

$$\frac{t-t_0}{S_t-S_0}=A+B(t-t_0)$$

三点法又称为固结度对数配合法，是由曾国熙（1959）提出的一种采用实测荷载与沉降时间曲线来预测沉降的方法。沉降量计算公式为：

$$S_t=S_dTe^{-U_t}+S(1-Te^{-U_t})$$

根据双曲线法和三点法所得沉降预测结果与 GM(1,1)灰色模型预测结果对比分析如表 5 所示。

表 5 GM(1,1)灰色理论与三点法、双曲线法预测对比

t/d	实测值	双曲线法		三点法		灰色理论(20 组)	
		预测值	相对误差/%	预测值	相对误差/%	预测值	相对误差/%
327	345.72	350.87	1.49	341.43	−1.24	345.76	0.01
332	349.42	353.65	1.21	346.52	−0.83	347.99	0.41
337	353.07	356.53	0.98	349.01	−1.15	350.11	0.84
342	354.79	358.59	1.07	351.53	−0.92	352.11	0.76
347	355.49	359.47	1.12	352.89	−0.73	354.02	0.41
352	355.98	358.65	0.75	354.34	−0.46	355.82	0.04
357	357.15	360.33	0.89	359.54	0.67	357.52	0.10

表 5 显示，采用 GM(1,1)灰色理论模型预测结果要明显精确于采用三点法、双曲线法的预测结果。

4 结论

- 1)GM(1,1)灰色理论模型的本质是通过
- 对原始数据进行一次累加生成，得到较强规律性的曲线后，再用指数曲线拟合得到生成模型。在利用灰色理论模型预测沉降时，采用的实测沉降数据序列组数越多和时间间隔越大，预测结果的精度就越可靠。
- 2)实测沉降数据的等时距处理对 GM(1,1)灰色理论模型预测沉降有很大影响。相较于三点法和

- 双曲线法，GM(1,1)灰色理论模型预测结果更为可靠。
- 3)对于软土路基沉降曲线的非线性特征，GM(1,1)灰色理论模型预测沉降结果可以较好地与实测沉降数据相符，该预测模型可为类似已知信息量少、不确定因素多的工程沉降预测研究提供借鉴。

[参 考 文 献]

[1] 闫爱军.高层建筑沉降预测的灰色模型研究[J].水资源与水工程学报,2016,27(2):227-230.

- [2] 潘林有,谢新宇.用曲线拟合的方法预测软土地基沉降[J].岩土力学,2004(7):1053-1058.
- [3] Asaoka A.Observational procedureof settlement prediction[J].Soils and Foundations,2008,18(4) :87-101.
- [4] 谭衢霖,魏健,胡吉平.基于小波神经网络的建筑工程沉降变形预测[J].应用基础与工程科学学报,2015,23(3):629-636.
- [5] 黄广军.Asaoka 法预测软土地基沉降时存在的问题和对策[J].岩土力学,2016,37(4):1061-1065,1074.
- [6] 杨涛,张文彦,李国维,等.基于双曲线拟合法的超载预压卸荷沉降速率标准研究[J].中国公路学报,2010,23(3):10-14,28.
- [7] 赖文杰,齐昌广,郑金辉,王新泉,左殿军.含分数阶的灰色模型及其在地基沉降预测中的应用[J].水文地质工程地质,2019,46(3):124-128,137.
- [8] 胡习阳,曾志雄,符梁,等.张桑高速公路路基沉降预测方法研究[J].公路工程,2018,43(4):278-282.
- [9] 张庆伟,肖建清.GM(1,1)与 Verhulst 模型在地基沉降预测中的适用性比较[J].沈阳工业大学学报,2014,36(6):716-720.
- [10] 何飞. 高速铁路路基基础工后沉降预测的相关研究[D].成都:西南交通大学,2011.
- [11] 王天化. 一种改进的径向基函数拟插值方法[D].长春:吉林大学,2014.

Application of GM(1,1) Grey Model in Soft Foundation Settlement Prediction

HU Qizhi^{1,2}, LIU Heng¹, TIAN Kun¹

(1 School of Civil Engin.,Architecture and Environment ,Hubei Univ.of Tech.,Wuhan 430068,China ;
2 Hubei Bridge Safety Monitoring Tech. and Equipment Tech .Engin. Center , Wuhan 430068,China)

Abstract: In order to solve the problem of soft ground settlement on the expressway of the North Bank Connection Section of the Wuxue Yangtze River Bridge Project, according to the observed settlement data and based on the grey system theory, the non-isochronous measured data are converted into isochronous series by cubic spline interpolation method. The grey GM (1, 1)model is established and the soft foundation settlement prediction curve is calculated by Matlab programming. The curve is compared with hyperbolic method and three-point method. The results show that the prediction precision of GM (1, 1) model is higher and the prediction result is more reliable, which can provide the scientific decision-making basis for the similar engineering soft soil roadbed settlement prediction.

Keywords: Grey Model; Soft Soil Subgrade; expressway; settlement prediction

[责任编辑:裴 琴]